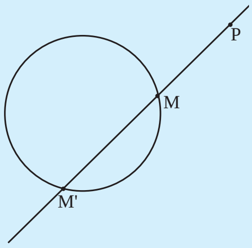
## Puissance d'un point par rapport à un cercle




On considère un cercle et un point P. Une droite variable passant par P coupe le cercle en deux points éventuellement confondus M et M'. On s'intéresse au produit des distances PM × PM'. Pour exprimer cette quantité, choisissons un repère centré au centre du cercle et tel que le point P soit situé sur l'axe des abscisses. Les coordonnées de P sont alors $(a, 0)$. Appelons (D) la droite variable passant par P et nommons $p$ son ordonnée à l'origine. L'équation réduite de (D) est $y = -\frac{p}{a}x + p$.

Appelons (C) le cercle considéré et nommons $r$ son rayon. L'équation réduite de (C) est $x^2 + y^2 = r^2$. Les coordonnées des points d'intersection éventuels M et M' de la droite et du cercle sont

$$\left(a\frac{p^2 + \sqrt{a^2r^2 + p^2r^2 - a^2p^2}}{a^2 + p^2}, -\frac{p}{a^2 + p^2}\left(p^2 + \sqrt{a^2r^2 + p^2r^2 - a^2p^2}\right) + p\right)$$

et

$$\left(a\frac{p^2 - \sqrt{a^2r^2 + p^2r^2 - a^2p^2}}{a^2 + p^2}, -\frac{p}{a^2 + p^2}\left(p^2 - \sqrt{a^2r^2 + p^2r^2 - a^2p^2}\right) + p\right).$$

On peut maintenant lancer les calculs de $PM^2$ et de $PM'^2$ (à la main, il faut s'accrocher…), puis celui du produit $PM^2 \times PM'^2$ (encore pire…). On obtient à la fin tout simplement $PM^2 \times PM'^2 = (r^2 - a^2)^2$.
Le produit des distances PM × PM' s'obtient en prenant la racine carrée de cette quantité, soit $|a^2 - r^2|$. Cette expression est indépendante de $p$, ce qui permet d'affirmer que le produit PM × PM' est indépendant de la sécante (D) choisie. Le recours au calcul formel pour traiter cette question en géométrie analytique est quasi incontournable.

## Le théorème de Ménélaüs

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine A. On considère le point B(4, 0) et le point C(1, 3). Une droite variable coupe respectivement la droite (AB) en M, la droite (BC) en N et la droite (AC) en P. On cherche à évaluer la quantité

$$\frac{AM}{BM} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CP}{AP}.$$

On note $a$ l'abscisse de M et $b$ celle de N. La droite (BC) a pour équation réduite $y = -x + 4$. Ainsi, on détermine que N a pour coordonnées $(b, 4 - b)$ dans le cas où $a$ est différent de $b$. De même, la droite (AC) admet pour équation $y = 3x$. La droite (MN), quant à elle, a pour équation $y = \frac{4-b}{b-a}(x - a)$.

Le point P se trouve à l'intersection de ces deux droites ; dans le cas où $a$ est différent de $2(b - 2)$, ses coordonnées sont donc

$$\left(\frac{a}{3} \times \frac{b-4}{2b-a-4}, a\frac{b-4}{2b-a-4}\right).$$

On en déduit les longueurs AP et CP (c'est assez fastidieux à la main…), puis la valeur de l'expression cherchée :

$$\frac{AM}{BM} \times \frac{BN}{CN} \times \frac{CP}{AP} = 1.$$

C'est le théorème de Ménélaüs d'Alexandrie.