par Stella Baruk

Pour une double archéologie de l'erreur

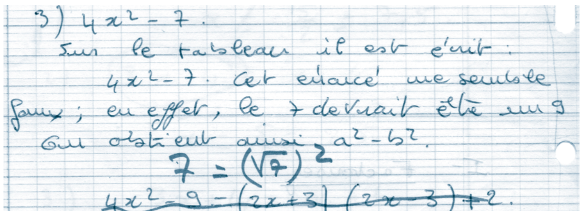
En mai 2006, un colloque Inter IREM-INRP intitulé *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements* avait lieu à Clermont-Ferrand. Le thème de ce 16e colloque auquel l'auteure était invitée ne pouvait en effet que la séduire : placées entre "rigueurs" et "raisonnements", voici que les "erreurs" bénéficiaient d'un encadrement prestigieux, et que la trilogie ainsi constituée s'inscrivait elle-même dans l'histoire et l'enseignement des mathématiques.

Il y a quatre décennies de cela, les erreurs n'avaient d'existence qu'indue, sortes d'excroissances, de proliférations un peu ou très monstrueuses qui offensaient l'œil, l'oreille, l'intelligence, voire le statut d'être pensant. Essayons en effet d'imaginer ce qu'elles menaçaient : les mathématiques sont le comble du sens, un exposé clair, net, précis, un cours bien fait ne peuvent que pénétrer dans une cervelle, pourvu qu'elle soit elle-même bien faite.

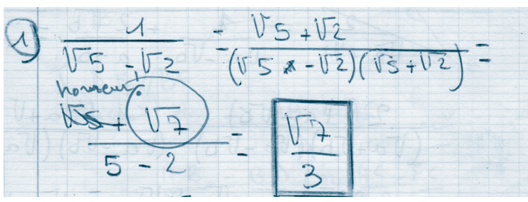
Tout événement contrevenant à cette triple normalité supposée mettait en donc en péril l'un des trois termes précédents. Y aurait-il des mathématiques imparfaites? Des professeurs incompétents ? Des élèves insuffisamment "doués" ?

C'est généralement le troisième soupçon qui l'emportait, et qui une fois énoncé se mettait à vivre de sa vie propre, se crédibilisant et prenant consistance au cours du temps scolaire; depuis des notes de plus en plus mauvaises, les jugements d'incompatibilité persuadaient le principal intéressé ainsi que ses parents que décidément même si l'on acceptait que n'existent pas de voies royales menant aux mathématiques, celles qu'il fallait emprunter pour y accéder n'étaient pas pour lui.

Mais, fort heureusement pour certains, en ce temps-là, une cervelle pouvait être considérée comme *partiellement* bien – ou mal – faite. La part qui en restait, une fois ayant renoncé à celle où se résolvaient les équations ou se démontraient les propriétés des figures, pouvait suffire pour devenir excellent avocat, brillant médecin, historien, sociologue…, toutes déterminations réunies en faisceau sous le vocable « littéraire ». Ce "littéraire"-ci, en seconde, considérant que 7 ne pouvait être le carré de rien, avait même suggéré un vice de forme. On comprend qu'il ait pu faire depuis - la copie date de 1974 - une brillante carrière de magistrat.



Le désaveu du professeur contraint de faire remarquer que 7 est le carré de sa racine, et sans doute désolé de devoir renvoyer au néant un calcul juste, mais hors sujet, est sobrement exprimé. Cela n'était pas toujours le cas, et il pouvait arriver, en ce temps-là, (ici 1971) que l'on s'indignât :



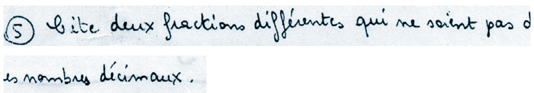
Fort heureusement, aujourd'hui, les choses ont changé ; les erreurs ne sont plus infamantes, on s'y intéresse, on les analyse. Elles restent pourtant inconfortables, et un doute continue de gâcher la vie des élèves, des enseignants, ou des deux. Car il semble bien en effet qu'il faut trouver des responsables, voire des coupables.

La « voie royale »

On dit que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas une voie plus courte que celle de l'Enseignement des Eléments pour la géométrie, et qu'il répondit qu'il n'existait pas une voie royale en géométrie (Proclus de Lycie (412-486) *Les commentaires sur le premier livre d'Euclide*, traduit du grec par Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, 1948.

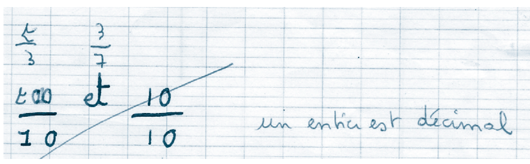
Lors d'un stage de formation continue destiné aux Inspecteurs de l'Education Nationale, intitulé – déjà – *Archéologie de l'erreur*, les réponses à un questionnaire distribué aux stagiaires avaient montré que l'erreur, en majorité, était mal vécue. C'est dire si mon projet de repérer, d'analyser, avec les participants, certaines des raisons aux "difficultés" que pouvait éprouver un élève de collège *dans ce que proposait l'école*, ne se réalisa pas sans mal, dans un climat souvent houleux. Pourtant ce stage, avait officiellement pour thème : « *chercher l'origine de certaines difficultés rencontrées par des élèves du second degré dans quelques pratiques pédagogiques de l'école élémentaire* » et les participants étaient tous volontaires.

Prenons un exemple avec une question posée en 1992 à un élève de 6e :



5) Cite deux fractions différentes qui ne soient pas d[es] nombres décimaux.

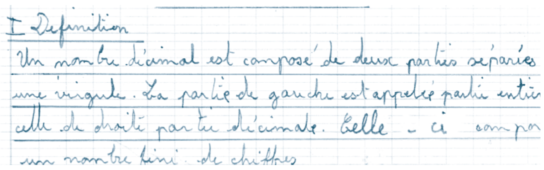
et sa réponse :



~~$\frac{4}{3}$~~ ~~$\frac{3}{7}$~~

$\frac{200}{10}$ et $\frac{10}{10}$ un entier est décimal

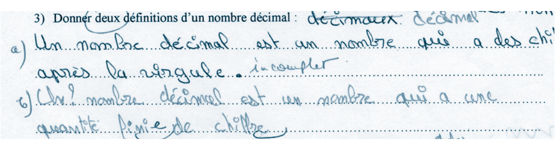
Ce très bon élève en proposant, sous forme de fraction 20, et puis 1, n'a-t-il rien compris aux nombres "non décimaux" ? Ou peut-être avait-il déjà compris quelque chose aux nombres "décimaux" ? Quelque chose qu'il aurait appris à l'école ? Comme par exemple on le voit ici



I Definition

Un nombre décimal est composé de deux parties séparées [par] une virgule. La partie de gauche est appelée partie entière [et] celle de droite partie décimale. Celle-ci compo[rte] un nombre fini de chiffres

ou ailleurs encore et encore, et ce depuis qu'existe l'école. Faites un micro-trottoir : pratiquement, toute personne qui n'est pas "prof de maths" répondra qu'un nombre décimal est "un nombre à virgule". Et d'autres "petit(e)s 6e" continueront de répondre comme celle-ci, en 2008 et en toute bonne foi (en second, c'est le corrigé, par l'élève).



3) Donner deux définitions d'un nombre décimal : ~~décimaux~~ décimal

a) Un nombre décimal est un nombre qui a des chi[ffres] après la virgule. incomplet

b) Un nombre décimal est un nombre qui a une quantité finie de chiffre

Des questions se posent

Alors pourquoi n'est-il pas possible d'affronter une réalité qui ne met pas en cause des personnes, mais une "tradition" scolaire qui se devrait d'être reconsidérée? Et pourquoi en 6e ne considère-t-on pas que cette erreur n'est pas celle de l'élève ? Et que toute évaluation qui ne prendrait pas en compte cette réalité serait in-juste ?

Des empêchements à comprendre existent donc, mais qui ne sont pas de l'ordre de ce que, après Bachelard, on appelle des "obstacles épistémologiques". Bachelard dit bien lui-même que la notion d'obstacle épistémologique ne vaut pas pour les mathématiques. Et en tous cas, pour ce qui est des mathématiques qui s'enseignent, on ne peut en faire état puisqu'en arrivant dans des livres de classe elles sont depuis longtemps consensuelles, c'est-à-dire digérées par un corpus qui ne risque pas de les rejeter un jour. Tout au plus, pourrait-on évoquer la difficulté que connurent, dans le passé, les inventeurs de concepts nouveaux. Mais les nombres complexes n'éliminèrent pas les réels, la non commutativité de la multiplication dans le corps des quaternions ne menace pas la commutativité tout court, les géométries non-euclidiennes n'abolissent pas celle d'Euclide. Dans les mathématiques qui s'enseignent, il ne peut donc, en toute logique, y avoir d'"obstacles épistémologiques" que ceux qu'on y a mis. Ici, clairement, penser qu'un décimal est un nombre à virgule, et un non-décimal un nombre sans virgule est issu de ce que l'on a appris à l'école.

Á propos d'"obstacle épistémologique"

Á notre avis cette division* est possible parce que la croissance de l'esprit mathématique est bien différente de la croissance de l'esprit scientifique dans son effort pour comprendre les phénomènes physiques. En fait l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique.

*entre esprit scientifique et esprit mathématique

Gaston Bachelard *La formation de l'esprit scientifique* Librairie Vrin 1970 Paris.

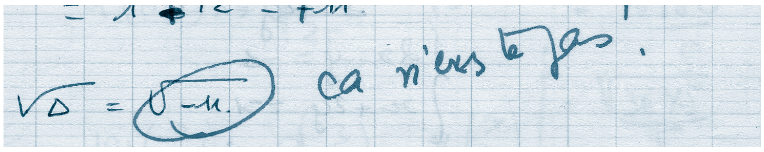
J'ai rapporté ici même un épisode que j'ai vécu, étudiante, en un temps lointain où les "complexes" n'étaient abordés qu'en "maths-géné", et qui me paraît significatif. Ce jour où il nous annonça donc que, oui, il existait des nombres dont le carré était négatif, les huées interrompirent quelques temps le professeur. Et lui, comme s'il était intervenu dans un meeting politique, laissait passer l'orage, pour confier, à la sortie : *c'est chaque année pareil…*

Depuis, je me suis bien souvent demandé pourquoi, puisque ces nombres existaient depuis quelques siècles, qu'ils étaient largement éprouvés, répertoriés et constituaient comme bien des notions à la fois le faîte d'un étage et le soubassement du suivant, pourquoi donc, non seulement on ne nous avait pas laissé pressentir leur existence, mais qu'on nous avait persuadés de leur impossibilité à être.

Si bien des choses ont bien changé, il semble que la survenue prématurée de complexes présumés, obtenus par le truchement d'"imaginaires" naïfs est toujours aussi peu appréciée. Bien sûr, il est peu agréable, comme on le voit ci-après, en 1e, de

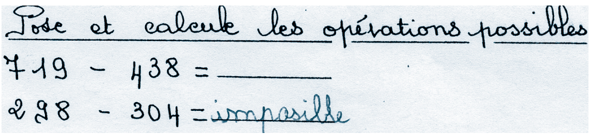
Aujourd'hui, les choses ont changé ; les erreurs ne sont plus infamantes, on s'y intéresse, on les analyse. Elles restent pourtant inconfortables, et un doute continue de gâcher la vie des élèves, des enseignants, ou des deux.

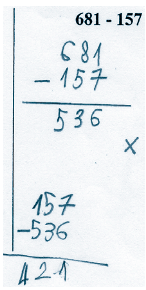
se trouver devant une écriture telle que $\sqrt{-11}$ dont on connaît les inconvénients.



Mais enfin, alors que *i* est proposé par Euler en 1777 on trouve $\sqrt{-1}$ sous la plume de mathématiciens jusqu'au 20e siècle, pour peu qu'en soit écartée toute ambiguïté ; un tout petit coup d'œil sur l'histoire rend donc cette écriture, $\sqrt{-11}$, beaucoup moins choquante qu'il n'y paraît. Alors, dans la mesure où on ne dispose pas tout de suite des moyens de lui donner du sens, mais qu'on en disposera quelques mois plus tard, dans la légalité, pourquoi ne pas se servir de cette erreur dans son sens étymologique, une *errance*, menant justement dans ce lieu où se trouvera pour un nombre la possibilité d'avoir un carré négatif ? Une simple évocation de l'existence de ce lieu, permet aussi de comprendre pourquoi les réels sont dits "réels", ce qui n'est pas un petit bénéfice…

Tout se passe donc comme si, au nom d'une rigueur qui empêche toute anticipation, une tradition d'enseignement séculaire amenait à édifier des murs qu'il faudra casser plus tard alors qu'existent des portes dont il faut seulement savoir qu'elles peuvent être ouvertes ou fermées.



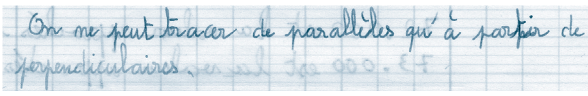


De quoi croit-on protéger ces petits CE2 en leur proposant l'exercice ci-contre, puisqu'à cœur vaillant rien d'impossible. Voyez plutôt comment le calcul change de sens selon commodité, et comment, si déclaré faux – la petite croix – il est mis carrément sens dessus dessous. Ce ne sont pas des interdits, ni de la "rigueur" par omission – ne pas évoquer avant l'heure des relatifs, des irrationnels, etc. – qui balisent l'espace du sens. Il vaut mieux savoir qu'il est possible de "faire" 3 – 5, pourvu qu'on lui trouve une signification. Devenir soi-même juge de la pertinence ou non de cette interprétation est autrement plus fécond que de se demander si c'est défendu ou permis.

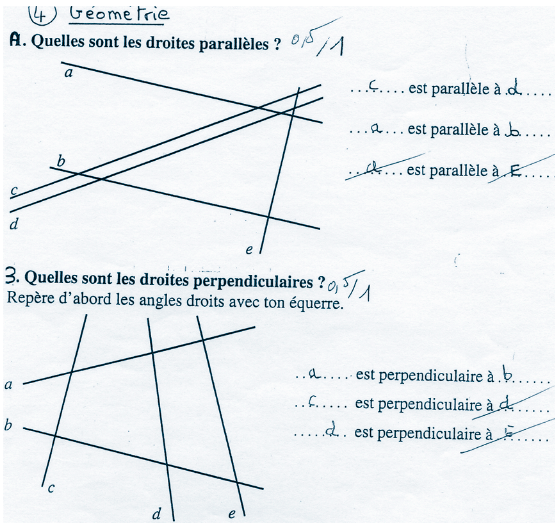
Si on remarque que "entendre" en français veut aussi bien dire "comprendre" que "ouïr", tout enseignement 'tombe' dans un entendement déjà saturé, quel que soit son degré de saturation. Comment réagit celui d'un élève de collège quand on y "injecte" du mathématique ? Si tout va bien, rien à dire. Mais si c'est par une réponse erronée, n'y aurait-il pas lieu de se demander quelle est l'histoire *scolaire* de cet entendement ? Par exemple; on sait le flou qui règne au collège sur médiatrices, bissectrices, médianes et hauteurs. Mais avant celui-là, à l'école, des "confusions", qui peuvent paraître extravagantes, entre parallèles et perpendiculaires.

Essayons de procéder à l'archéologie de cette erreur. On s'aperçoit, chose étonnante, que parallèles et perpendiculaires arrivent en classe en même temps, et ne peuvent exister les unes sans les autres : définitions, reconnaissance, critères mettent en jeu deux parallèles et une perpendiculaire à l'une des deux, deux perpendiculaires et une parallèle à l'une des deux ou deux perpendiculaires à une même droite.

D'où cette magnifique déclaration de dépendance

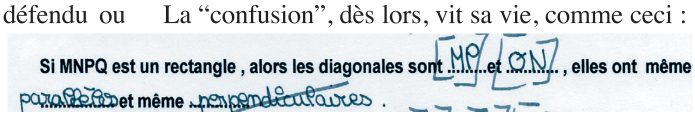


Petit florilège des résultats ainsi obtenus.Comme il s'agit d'une confiance *aveugle* faite aux yeux, l'écart va très vite s'installer entre le *vu* et l'*entendu*.

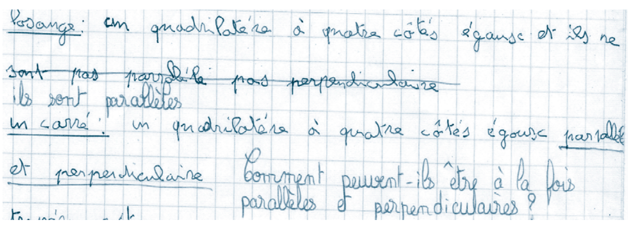


Ici, si en troisième question on ne sait pas quelle droite est évoquée par la lettre (ou *d* ou *a*) , on sait en tous cas que cette affirmation disqualifie les deux premières ; mieux encore, il semblerait avec deux réponses sur trois que le glissement se soit fait entre des droites qui ne se coupent pas (sur le dessin) et des perpendiculaires.

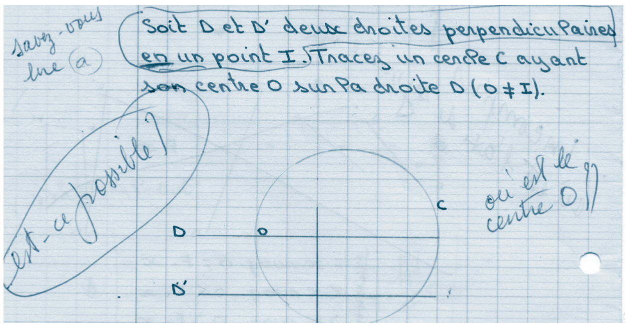
La "confusion", dès lors, vit sa vie, comme ceci :



ou comme ici :



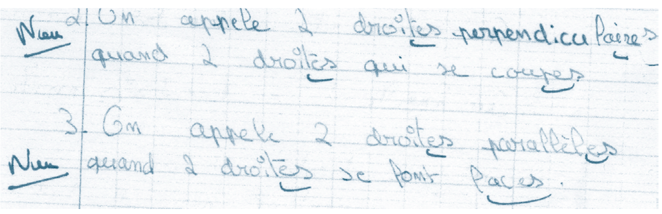
où parallèles et perpendiculaires, unies à jamais, *sont* ou *ne sont* pas, ensemble jusqu'à trouver son achèvement en classe de 3e.



"Est-ce possible ?" demande le professeur ; j'avoue que si rien ne change dans la façon d'aborder la géométrie à l'école, cela n'est pas seulement possible, mais probable.

C'est à la fois amusée et émue, que j'ai découvert la copie que cette petite 6e, confuse, n'osait pas me montrer. Emue comme chaque fois que je vois attribuer un zéro in-juste, et amusée par la façon dont parfois un entendement de jeune élève se "débrouille" avec son passé scolaire, celui de deux notions amalgamées et rendues artificiellement dépendantes, du brouillage sonore qui s'ensuit de deux désignations "savantes" accentué par leur sorte d'assonance.

Aux questions qu'appelle-t-on deux droites perpendiculaires, puis deux droites parallèles, voici, ses réponses, avec sa note (pour la totalité de l'interro).



Magnifique façon d'avoir perçu l'essentiel, c'est-à-dire que deux droites se coupent ou ne se coupent pas ; et vive Euclide! Mais a-t-on seulement entendu parler de lui, à l'école, voire au collège ? Et sait-on, à l'école que ces deux droites sont dites *parallèles* (du grec *parallelos*) parce qu'elles sont "placées en regard l'une de l 'autre", c'est-à-dire *se font face*…

En conclusion

J'ai écrit plus de mille pages sur les erreurs et tenté de montrer comment les analyses qu'il est possible d'en faire sont un enseignement précieux. D'une part sur la *matière* mathématique qui pour un élève se présente comme granuleuse, hétérogène, ou au contraire faussement familière quand s'y mêle la langue du quotidien : erreurs dues à la matière, ou *structurelles* ; d'autre part sur la *manière*, c'est-à-dire sur la façon de s'y prendre de l'institution, contenus, modes de transmission : erreurs dues à la manière, ou *conjoncturelles*. Matière et manière sont remises en questions, au sens propre, par les erreurs ; questions qui, si on les laisse cheminer hors de toute volonté de chercher des coupables, permettent de faire avancer les choses. Et ceci d'autant plus qu'il s'agit d'erreurs *fraîches*, c'est-à-dire, prises tôt dans chaque apprentissage, et ce dès l'école. Sinon, c'est rapidement que les ambiguïtés, les incertitudes allant s'accumulant, on obtient des compressions d'erreurs inextricables, que j'appelle des Césars d'erreurs, et qu'il est absolument impossible de débrouiller en classe.

Si j'ai surtout ici donné des exemples de cette double archéologie de l'erreur c'est parce qu'en ces temps de réformes tous azimuts, il est plus que jamais nécessaire de se demander s'il n'est pas possible d'aborder les choses autrement, et de penser à une vraie réforme de l'école. Plutôt que d'évaluer à tout va, de cataloguer « en difficulté » un enfant qui donne une réponse non conforme, il faudrait que l'institution comprenne qu'il est de son devoir d'être généreuse en temps, en personnes, en conceptions éducatives. Les erreurs fraîches sont des fenêtres épistémologiques qui s'ouvrent sur une possible réflexion de fond. Sera-t-il possible, un jour, de vraiment y parvenir ?

S. B.

Bibliographie :

• Bachelard Gaston La formation de l'esprit scientifique Vrin 1970

• Baruk Stella, L'Âge du capitaine De l'erreur en mathématiques Seuil 1985 (réédité en points-sciences en 1992, 2002)

• Baruk Stella, Si 7=0, Quelles mathématiques pour l'école ? Odile Jacob 2004